Demonstratio Prop. XXXII Lib. I:mi

Elementorum Euclidis,

quam,

Annuente Facultate Philosophica,

Præside

CAROLO JOH. D:S HILL,

Math. Prof. Ord.,

pro Laurea capessenda

publice in Audit. Mathem. die XXI Junii MDCCCXLVII ventilandam

proponit

SVENO BORGSTRÖM,

Scanus.

III.

Lundæ,

typis Berlingianis,

MDCCXLVII.

$5c > d$ et $d = AB + AB' - BB'$ fecimus, ideoque foret $BB^V - AA^V > AB + AB' - BB'$, seu $BB^V + BB' > AB + AA^V + AB'$. Simul vero fecimus $BB' = B^V B^{V'}$ et $AB' = A^V B^{V'}$, quare jam foret $BB^V + B^V B^{V'} > AB + AA^V + A^V B^{V'}$ seu recta $BB^{V'}$ haud brevissima linea inter puncta B et $B^{V'}$. Quod cum aperte absurdum sit (Lem. præc.), fieri nequit, ut anguli Trianguli ABB' duos rectos ($2R$) superent. *Q. D. E.*

Cor. 1. Trianguli igitur anguli simul vel duos efficiunt rectos, vel minus.

Cor. 2. Quæ cum ita sint, in nostra figura BB^V vel $=$ vel $<$ AA^V (seu $Bf = < AF$) sit. (Theor. præc.).

Cor. 3. Si igitur angulus B rectus fuerit, linea AA^V ipsi BB^V (in punctis A, A', A'', A''', A'^V, A^V) æquidistans hanc vel æquat vel superat.

Cor. 4. Trianguli cujusvis angulus externus C' haud minor est duobus internis $(A + B)$ simul sumtis. Est enim $A + B + C = < 2R = C + C'$, ideoque $A + B = < C'$ *).

---

*) Cor. 4 ad parallelarum theoriam condendam extendi potest. Aperte enim valet, si vel alter angulus internus quam minimus fuerit, ideoque latera ipsum comprehendentia quam maxima, quin imo parallela. Tum vero ita exprimatur:

Parallelarum angulus externus haud minor est interno. (Fig. 8). Quoniam in triangulo est externus (ipso BCA contiguus) $ACD = C' = > A + B$, et in parallelis $B = > o$, erit $C' = > A$, seu externus C' haud minor interno A. Quæ cum ita sint, theoria antea (p. 33) proposita valebit.

Sed ad hoc Corollarium (vel axioma, si placet) ideoque theoriam statim hoc modo pervenire licet. In quocunque triangulo est angulus externus C' major interno A (1: 16), ideoque C' haud minor ipso A est; hocque aperte valet, si vel apex anguli longissime fugiet, donec sua crura parallelæ devenerint; quare ad has *externus haud minor erit interno.* In parallelis vero ulterius haud conspicitur, utra parte apex quærendus sit, (et revera neutra adest), ideoque hoc axioma dupliciter valet, ut theorematis demonstratio poscit.

Cor. 5. Trianguli rectanguli duo anguli acuti rectum non superant.

Cor. 6. Tetragoni convexi anguli simul vel IV efficiunt rectos, vel minus.

Cor. 7. Si igitur tres tetragoni anguli recti fuerint, quartus non erit obtusus; et si duo recti et tertius obtusus, quartus necessario acutus erit. (Quod aliter antea p. 51. demonstravimus).

Cor. 8. Trianguli æquilateri tres anguli ($3.\triangle = S$) simul duos rectos efficiunt.

Laterum enim mediis punctis connexis, novum ejusmodi triangulum exoritur, cujus anguli sint $= 3\delta = \sigma$, eritque igitur tum $S = < 2R$, tum $\sigma = < 2R$, ideoque $2.S + \sigma = < 6R$. At anguli ad media illa puncta sunt $= 3.(2\triangle + \delta)$ et $= 3.2R$, seu $2.S + \sigma = 6R$, quare neque $S < 2R$, neque $\sigma < 2R$ esse potest, ideoque necessario est $S = 2R = \sigma$.

Cor. 9. In omnibus igitur eis triangulis, quæ per Prop. 1. p. 62 ex æquilatero construuntur, angulorum summa $2R$ exæquat.

Cor. 10. (Fig. 9). Parallelarum secundum 1: 31 constructarum angulus externus haud minor est interno. — Sit enim $\wedge\, HBQ = APB = P$, eritque ex Cor. 4. KBQ haud minor $P + AKB$, ideoque reliquus KBH seu hujus verticalis et externus haud minor interno AKB.

Prop. 4. Theor. *Summa (S) angulorum Trianguli cujusvis ABC duo-*
(Fig. 23.) *bus rectis minor non est.*

Sit enim illa $S = A + B + C$ atque $> R$, (Schol. p. 65) ideoque $S - R$ data quantitas, transmuteturque Triangulum ABC in aliud $\alpha\beta\gamma$ ejusdem summæ ($S = \alpha + \beta + \gamma$), in quo summa duorum angulorum $\alpha + \beta$ dato hoc angulo $S - R$ minor sit, quo certe casu tertius $\gamma > R$ erit (ib.). Quæ cum ita sint, super basi $\beta\gamma$ ad alteram partem ipsi $\alpha\gamma\beta$ congruens triangulum $\delta\gamma\beta$ constituamus (1: 20 et 22), ducamusque $\delta\alpha$, novum triangulum $\delta\alpha\gamma$ orietur istis adjacens (ob $\wedge\gamma$ obtusum). Hujus vero angulorum summa sit $= P$, quæ certe $=$ vel $< 2R$ erit (Pr. 3). Jam si fieri posset, ut $S < 2R$ esset, $2R - S$ data foret

quantitas, quam $= d$ ponamus. Summa igitur S' angulorum totius trianguli $\alpha\beta\delta$ una cum tribus angulis ad γ, qui $4R$ exæquant (1: 13), æqualis erit summis angulorum trium triangulorum $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\gamma$ et $\delta\alpha\gamma$, quæ $= S + S + P = 2.S + P$ efficiunt. Sed hæc summa $P =$ vel $< 2R$ est (Pr. 3), ergo illa S' cum $(+)4R = 2S + P =$ vel $< 2S + 2R$. Sed $2R - S = d$ posuimus, ideoque $2R = S + d$ atque $S = 2R - d$ fecimus, quare jam erit $S' + 4R =$ vel $< 2.(2R - d) + 2R$ et igitur ablátis $4R = 2.2R$, $S' = < 2R - 2d$ seu $2R - S' = > 2d$. Novum igitur obtinuimus triangulum $\alpha\beta\delta$, cujus angulorum summa $S' =$ vel $< 2R - 2d$ est, seu saltem duplo magis a duobus rectis aberrat quam illa S trianguli ABC, seu duo recti superant S' saltem duplo magis quam ipsam S. Hoc igitur triangulum $\alpha\delta\beta$ simili modo ac ABC tractando, novum obtinebimus triangulum, cujus summa angulorum $S'' =$ vel $< 2R - 4d$ erit; similiterque novum summa $S''' = < 2R - 8d$ gaudens; et s. p. Cum vero hoc quousque lubet continuare liceat, tandem ad summam $S^{v} = < 2R - 2^{n}.d$ perveniemus, quæ dato angulo R minor erit, (faciendo scilicet $2R - 2^{n}.d < R$, seu $2^{n}.d > R$, ideoque $2^{n} > R:d$, quod semper licet). Sed hoc aperte absurdum est, cum cujusvis trianguli summa angulorum $> R$ sit (Schol. cit.). (Vel saltem $> \frac{2}{3}R$ (Prop. 3. Cor. 8) (quin, quod multo absurdius foret, summam S^{v} negativam facere possemus, capiendo $2^{n} < \frac{2R}{d}$). Fieri igitur nequit, ut $S < 2R$ sit. *Q. D. E.*

Aliter. (Fig. 24). Sit enim primo ABC rectangulum ad B, atque, si fieri possit, angulorum $A + B + C$ summa S duobus rectis minor et igitur $= 2R - \delta$. Sitque angulus $A < C$, ideoque minor angulo acuto BaC trianguli rectanguli æquilateri aBC (in quo $Ba = BC$). Quæ cum ita sint, eidem congruens apponemus triangulum BCD (ad C rectangulum), cujus igitur anguli etiam summam $P = 2R - \delta$ efficiunt, atque ex D normalem DE in AC demittamus. Quoniam igitur $\wedge E$ est

rectus atque A semirecto vel illo acuto minor, ex casu axiomatis jam p. 28. Cor. probato lineæ AB et ED satis productæ sibi invicem alicubi, videsis in F, occurrant, necesse est, unde novum exorietur Triangulum AEF, cujus summa angulorum $A+E+F=S'$ sit. Hanc jam ipso S multo minorem prædicamus, nempe $=S-\delta'$. Quoniam enim (per Prop. præc.) utriusque triangulorum BDF et CDE summa angulorum duos rectos haud excedit, omnes quatuor trianguli, ex quibus AEF componitur, summa angulorum gaudebit, quæ $2.S+2.2R$ seu $8R-2\delta$ haud excedit. Ablatis igitur angulis ad B, C et D, quæ simul 6 rectos efficiunt, residuum erit $S'=<2R-2\delta$. Quoniam vero hæc summa S' ad triangulum ipsi ABC simile pertinet, similiter cum hoc novum construetur ejusmodi triangulum, cujus angulorum summa erit $S''=<2R-4\delta$; similique constructione iterata, perveniemus ad triangulum rectangulum, anguloque A gaudens, cujus summa angulorum $S^{\nu}=<2R-2^{\nu}.\delta$ foret, tandemque igitur recto minor, si $2^{\nu}=>R:\delta$ efficitur; quod aperte absurdum est, cum jam unus angulus sit rectus. Cujusvis igitur trianguli rectanguli summa angulorum duobus rectis minor est; unde facile, cum in duo ejusmodi dividi possit, idem de triangulo quocunque evincitur.

Schol. In hac postrema probatione dubius superesse videtur casus, quo $A=C$ fit; tum vero, sicuti alias, hæc patet via, ut prævie alterutrum angulum quam minimum per constructionem in Probl. 1. (p. 62) adhibitam efficere liceat. Tum enim vel mox per Lem. 2. Cor. 5 (bisecta catheto AC), fit angulus CBD dimidio minor ipso CBA (Fig. 3.), qui vel $=C$ sit, ductaque normali DE in CB, novum exorietur triangulum, in quo angulus EBD multo (plus duplo) minor erit ipso EDB. Aperte enim inde fit (per Lem. 2. Cor. 3., cum $EBD<DBA$ per Cor. 4 sit) angulus $EDB>BDA>C$, ideoque $EBD<\frac{1}{2}CBA=\frac{1}{2}C<\frac{1}{2}EDB$.

Schol. Adhuc aliam probationem ex theoria regularium per constructionem in Pr. 1 adhibitam petas, (ut jam p. 65 monuimus). — Facile hinc colliges, summam $A+B+C$ angulorum duos rectos æquare. — Sed hoc seorsim exponi meretur.

Prop. 5. Theor. Anguli cujusvis trianguli (ABC) unâ summam (S) duobis rectis ($2R$) æqualem efficiunt.

Quoniam enim S et $2R$ quantitates sunt ejusdem generis (nempe

angulorum), vel æquales sint vel inæquales. Si vero $2R$ summæ S inæquales essent, foret S vel major vel minor ipsis $2R$. Sed ostendimus (Pr. 3, 4) S neque esse majorem neque minorem duobus rectis; ergo S et $2R$ inæquales esse nequeunt; quare necessario $S=2R$ sint æquales. *Q. E. D.*

Aliter. (Fig. 10). Si rete quadrangulo simile $ABB^{V}A^{V}$ (si $F=A^{V}$ et $f=B^{V}$) ex triangulis ABB', $B'A'A$, $A'B'B''$, $B''A''A'$ etc. ipsi ABC vel ABB' congruentibus ita composuimus, ut semper duo quæque contigua parallelogrammum constituant, ideoque latera æqualia parallela fiant, tres quique anguli ad A', A'', $A'''\ldots A^{V}$ et ad B', $B''\ldots B^{V}$ æquales erunt ipsis A, B, C trianguli dati (ABB'). Si igitur horum summa $A+B+C=S$ major duobus rectis esset, ideoque anguli $AA'A''$, $BB'B''$ et similia majores duobus rectis, linea $AA'A''\cdot\cdot A^{V}$ sursum atque $BB'B''\ldots B^{V}$ deorsum frangeretur, et quidem regulariter, (ut in fig. 25) cum ex lineis æqualibus sub æquali angulo ($=S$ vel potius $=4R-S$) componantur. Sin vero summa illa S minor duobus rectis esset, $AA'A''\ldots A^{V}$ deorsum atque $BB'B''\ldots B''$ sursum similiter frangeretur, ut in fig. 26 et 27), (medium enim rete horizontaliter situm ponimus, et A sinistrorsum, A' dextrorsum, quod semper licet). Sed jam neuter horum casuum locum habere potest. Si enim ille: (F: 25) lineas $AA'\ldots A^{V}$ et $BB'B''\ldots B^{V}$ eousque continuare liceret, (Pr. pag. 47 sq.) donec sinistrorsum redire inciperent, ex. gr. ad A^{IV} et B^{IV}, si antea dextrorsum procedebant, tumque linea $A^{V}B^{V}$ præcedentium aliquam secaret, parallelogrammumque $A^{IV}B^{IV}B^{V}A^{V}$ antecedenti superponeretur, nec ei adjaceret, sicuti posuimus. Quinimo hoc $A'''B^{IV}B^{V}A^{IV}$ gauderet lateribus decussatis $A'''B^{IV}$ et $A^{IV}B^{V}$, nec ideo parallelogrammum esset. — Neque magis hic locum habere potest: tum enim latera $AA'\ldots A^{V}$ et $BB'B''\ldots B^{V}$ similiter continuata, cum magis magisque primo a parallelis AA' et BB' introrsum recedant, vel alicubi, ut inter $A^{IV}A^{V}$ et $B^{IV}B^{V}$, sese decussarent (fig. 27), quod absurdum est, cum ex parallelis partibus componantur, vel etiam (fig. 26) reverterent, ideoque latera parallelogrammorum præcedentium secarent, suaque parallelogramma his superponerent, quod æque absurdam decussationem causaret. Cum igitur horum neutrum valeat, necesse est ut summa angulorum $A+B+C$ duobus rectis ($2R$) æqualis sit, ideoque totum rete vere parallelogrammum, ut in fig. 10.

Q. E. D. — Ceterum cum triangula ubique eadem sint, lineas $AA' .. A^{V}$ et $BB' .. B^{V}$ facile æquidistantes prædices, utut ejusdem trianguli altitudine pro communi distantia gaudentes. — Jam vel facilis ad parallelas patet via, ut ex aliorum scriptis bene constat. Vel mox ipsam propositionem tam disceptatam jam demonstrare licet.

Prop. 6. (Probl.). (Fig. 1) Datis duobus quibusvis angulis, (α, γ) quórum tamen summa duobus rectis minor sit, unaque linea, triangulum super hac construere, cujus anguli huic adjacentes istis congruant.

Sit AC linea data $= a$, ad quam (1: 22) constituantur anguli ACE et CAD datis γ et α æquales, quorum crura producantur, donec sese intersecant alicubi in E, eritque aperte AEC triangulum desideratum — dummodo intersectio pateat. Quam ita jam probamus. Quoniam $\alpha + \gamma < 2R$, sit $\delta = 2R - (\alpha + \gamma)$, seu $\delta = R - \gamma$, si primo $\alpha = R$ ponimus. Jam vero alicubi (Fig. 4.) construamus angulum $ABC = \delta$, in cujus crure AB per $\mathcal{A}$. 4 quæramus punctum A, cujus ab altero distantia $AD >$ linea data (a) sit, deindeque faciamus AN (Fig. 1) $= BD$ (Fig. 4) atque in AN constituamus angulum FNA (Fig. 1) $= \delta \doteq ABD$ (Fig. 4), in quo igitur jam $FA = AD$ (Fig. 4) $> a = AC$ (Fig. 1), ideoque punctum F (Fig. 1) in AC producta invenitur. Quoniam igitur $FNA = \delta$ et $A = \alpha = R$, erit (quia modo cujusvis trianguli summam angulorum $= 2R$ ostendimus) reliquus angulus $AFN = 2R - (R + \delta) = R - \delta = \gamma = ACE$, ideoque CE ipsi FN parallela, quare illa CE e triangulo FNA egrediens necessario latus AN secat. — Sin vero neuter angulorum γ et α rectus fuerit, sed $\alpha = CDE$ et $\gamma = DCE$, hunc casum, ducendo CA in DE normalem, ad illum facile revocabis. (Vel Hoffmannum consulas).